

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XX, Nr. 10

ÜBER DIE ENERGIEAUSSTRAHLUNG
VON EINEM AKUSTISCHEN
WIDERSTAND

VON

V. THORSEN



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1943

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

EINLEITUNG

Eine frühere Abhandlung¹ enthielt die Beschreibung der Ausstrahlung von einem akustischen Widerstand bestehend aus einem Rohr von variabler Länge, das von einem Widerstand, z. B. einer Platte mit rundem Loch, abgeschlossen war. An Hand einer elektrischen Analogie wurde gezeigt, dass ein solches vor einem Telephon angebrachtes System, das als akustischer Transformator wirkt, die Berechnung der von der Rohrleitung ausgestrahlten Energie als Funktion der Impedanz des Rohres und der Endfläche ermöglicht, und dass umgekehrt die Messung der Energieausstrahlung eine Berechnung der Rohrimpedanz gestattet, und zwar für die Ausgangsimpedanz des Rohres wie auch für den Verlustwiderstand im Innern des Rohres. Dadurch erhielt man Methoden 1. zur Messung akustischer Impedanzen, 2. zur Messung der Dämpfung rauher Stoffe, 3. zur Konstruktion eines künstlichen Ohres.

Im folgenden soll die theoretische Grundlage der angewandten Methoden dargelegt werden, wobei eine mathematische Analyse der benutzten akustischen Rohrleitungen durchgeführt wird. Dadurch wird die Richtigkeit des benutzten Verfahrens in allen Einzelheiten bewiesen und die auf den reibungslosen Fall (mit Reflexions- und Phasenkreisen) gewöhnlich angewandte Betrachtungsweise dahin erweitert, dass sie auch Rohre mit Reibungsverlusten umfasst.

1. Die Telegraphengleichung und ihr akustisches Analogon.

Als Grundlage der theoretischen Behandlung wird die »Telegraphengleichung« der Elektrotechnik benutzt, deren Lösung folgende ist:

¹ V. THORSEN: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd. XX, 9.

$$W_a = \frac{U_a}{I_a} = \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}} \cdot \frac{\left(U_e \sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}} + I_e \right) e^{l\gamma} + \left(U_e \sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}} - I_e \right) e^{-l\gamma}}{\left(U_e \sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}} + I_e \right) e^{l\gamma} - \left(U_e \sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}} - I_e \right) e^{-l\gamma}}. \quad (1)$$

Hier ist W_a die Eingangsimpedanz, U_a , I_a bzw. U_e und I_e sind die Eingangs- und Ausgangsspannungen bzw. Stromstärken, R , G , L , C ohmscher Widerstand bzw. Ableitung, Selbstinduktion und Kapazität, alles pro Längeneinheit.

Werden die Abkürzungen

$$Z = \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}} \quad (\text{die charakteristische Impedanz}) \quad (2)$$

eingeführt und die Eingangs- und Ausgangsimpedanzen Z_a bzw. Z_e benannt, so kann man (1) auch schreiben:

$$Z_a = Z \frac{\frac{Z_e}{Z} (e^{l\gamma} + e^{-l\gamma}) + (e^{l\gamma} - e^{-l\gamma})}{(e^{l\gamma} + e^{-l\gamma}) + \frac{Z_e}{Z} (e^{l\gamma} - e^{-l\gamma})} \quad (3)$$

oder

$$Z_a = Z \frac{\frac{Z_e}{Z} \cosh l\gamma + \sinh l\gamma}{\cosh l\gamma + \frac{Z_e}{Z} \sinh l\gamma}, \quad (4)$$

wo ferner

$$\gamma = \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)} = \beta + i\alpha. \quad (5)$$

β gibt an, wie sich die Amplitude mit der Länge (l) verändert, α , wie die Phase gleichzeitig variiert.

Für den Übergang von elektrischen zu akustischen Größen gilt folgendes Umsatzschemata:

Elektrisch	Akustisch	Dimension
Spannung U Volt	Druck p	$ML^{-1}T^{-2}$
Stromstärke I Amp.	Volumengeschw. u	L^3T^{-1}
Widerstand pro cm $R \cdot$ Ohm	Reibung/cm ² . . . r/A	$ML^{-5}T^{-1}$

Elektrisch	Akustisch	Dimension
Ableitung G Siemens	1: Strömungs- geschw. $A \cdot s$	$M^{-1}L^3T$
Selbstinduktion . L Henry	akust. Masse . . . ρ/A	ML^{-5}
Kapazität C Farad	Nachgibigkeit . . A/pz	$M^{-1}L^3T^2$
Impedanz W Ohm	akust. Impedanz p/u	$ML^{-4}T^{-1}$

Mit Hilfe dieses Schemas kann die Telegraphengleichung dahin erweitert werden, dass sie für die akustische Rohrleitung gilt, und in gewissen Fällen wird es mittels einer mathematischen Behandlung möglich sein, (4) eine solche Form zu geben, dass man eine einfache physikalische Deutung der Ergebnisse erhält.

Der Ausdruck (2) für Z wie auch (5) für γ ist komplex und der Ausdruck (4) für Z_a daher sehr schwer zugänglich. Wenn R und G indessen kleine Grössen sind, kan man Z und γ mit Hilfe von Taylors Formel reihenentwickeln. Man hat

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{h}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{k}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{hk}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots,$$

woraus

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} + \dots.$$

In diesem Falle ist

$$Z = f(R, G) = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}},$$

also

$$Z = f(R, G) = f(0, 0) + R \left(\frac{\partial Z}{\partial R} \right)_{R=G=0} + G \left(\frac{\partial Z}{\partial G} \right)_{R=G=0} + \dots.$$

Nun ist

$$\frac{\partial Z}{\partial R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G + i\omega C}{R + i\omega L}} \cdot \frac{1}{G + i\omega C} \quad (\text{für } G = R = 0) \rightarrow \frac{1}{2 i\omega C} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

und

$$\frac{\partial Z}{\partial G} = -\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{G + i\omega C}{R + i\omega L} \right)^{-3}} \cdot \frac{1}{R + i\omega L} \quad (\text{für } G = R = 0) \rightarrow -\frac{1}{2 i\omega C} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Eingesetzt ergibt dies

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{R}{2i\omega C} \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{G}{2i\omega C} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6)$$

Auf die gleiche Weise erhält man für $\gamma = \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}$, wenn R und G nahezu Null sind,

$$\gamma = i\omega\sqrt{LC} + \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7)$$

2. Die reibungsfreie akustische Rohrleitung.

Benutzt man als akustische Rohrleitung ein Messingrohr, so sind seine Wände so steif, dass man mit Sicherheit $G = 0$ hat. Ist das Rohr nicht zu eng, so dass die innere Reibung gleich Null zu betrachten ist, dann ist ausserdem $R = 0$.

Mit Hilfe von (6) und (7) und dem Umsatzenschema erhält man

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{und} \quad \gamma = i\omega\sqrt{LC}$$

oder, in akustischer Form,

$$Z = \sqrt{\frac{\rho}{A} \cdot \frac{A}{\rho z}} = \frac{\rho c}{A} \quad \text{und} \quad \gamma = i\omega \sqrt{\frac{\rho}{A} \cdot \frac{A}{\rho z}} = i \frac{\omega}{c} = ik,$$

da $\omega = k \cdot c$ und $\rho c^2 = p z$.

Wird dies in (4) eingesetzt, so erhält man

$$Z_a = \rho c \frac{\frac{Z_e}{\rho c} \cosh ikl + \sinh ikl}{\cosh ikl + \frac{Z_e}{\rho c} \sinh ikl}.$$

Bedenkt man, dass

$$\cosh(ix) = \cos x \quad \text{und} \quad \sinh(ix) = i \cdot \sin x,$$

so geht die letzte Gleichung über in

$$Z_a = \rho c \frac{\frac{Z_e}{\rho c} \cos kl + i \sin kl}{\cos kl + i \frac{Z_e}{\rho c} \sin kl}. \quad (8)$$

Dies ist somit die Eingangsimpedanz für ein Rohr von der Länge l , das von der Ausgangsimpedanz Z_e abgeschlossen ist.

Die Gleichung (8) kann auf verschiedene Weise behandelt werden. Führt man den Amplituden-Reflexionskoeffizienten r für Z_e ein und die Phasenänderung bei demselben ϑ , so erhält man

$$r e^{i\vartheta} = \frac{Z_e - Z}{Z_e + Z} = \frac{\frac{Z_e}{\rho c} - 1}{\frac{Z_e}{\rho c} + 1}. \quad (9)$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{Z_e}{\rho c} = \frac{1 + r e^{i\vartheta}}{1 - r e^{i\vartheta}}.$$

Wird dies in (8) eingesetzt, so erhält man, wenn man $\cos kl$ und $\sin kl$ gleichzeitig durch $\frac{e^{ikl} + e^{-ikl}}{2}$ bzw. $\frac{e^{ikl} - e^{-ikl}}{2i}$ ersetzt,

$$\frac{Z_a}{\rho c} = \frac{(1 + r e^{i\vartheta})(e^{ikl} + e^{-ikl}) + (1 - r e^{i\vartheta})(e^{ikl} - e^{-ikl})}{(1 - r e^{i\vartheta})(e^{ikl} + e^{-ikl}) + (1 + r e^{i\vartheta})(e^{ikl} - e^{-ikl})},$$

woraus durch Reduktion

$$\frac{Z_a}{\rho c} = \frac{e^{i(2kl - \vartheta)} + r}{e^{i(2kl - \vartheta)} - r}.$$

Wird im Zähler und Nenner mit $(e^{-i(2kl - \vartheta)} - r)$ multipliziert, und werden \cos und \sin wieder eingeführt, so erhält man

$$Z_a = \rho c \cdot \frac{1 - r^2 - i 2 r \sin(2kl - \vartheta)}{1 + r^2 - 2 r \cos(2kl - \vartheta)}. \quad (10)$$

Diese Gleichung ist zur Untersuchung der Phase gut geeignet.

Man sieht, dass Z_a reell ist, wenn

$$\begin{aligned} \sin(2kl - \vartheta) &= 0, \\ 2kl - \vartheta &= 2p\pi \end{aligned}$$

also

$$l = \frac{\vartheta}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2} + p \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (10a)$$

Die Rohrlänge l , die den ersten reellen Wert von Z_a ergibt, bestimmt also den Phasensprung bei Z_e .

Für $2kl - \vartheta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$ erhält man $\cos(2kl - \vartheta) = +1$ und für $2kl - \vartheta = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$ erhält man $\cos(2kl - \vartheta) = -1$, so dass Z_a , das also für diese Werte reell ist,

$$\frac{Z'_a}{qc} = \frac{1+r}{1-r} \quad \text{und} \quad \frac{Z''_a}{qc} = \frac{1-r}{1+r} \quad (10b)$$

wird.

Für $2kl - \vartheta = 0$ ist Z_a Maximum, für $2kl - \vartheta = \pi$ Minimum. Man sieht ferner, dass

$$\frac{Z'_a}{qc} \cdot \frac{Z''_a}{qc} = 1.$$

Die Gleichung gestattet indessen auch, r zu bestimmen. Aus (8) folgt, dass man für $l = 0$

$$Z_a = Z_e$$

hat.

Setzt man also $l = 0$ in (10) ein, so erhält man

$$Z_e = w + iq = qc \frac{1 - r^2 + i2r \sin \vartheta}{1 + r^2 - 2r \cos \vartheta}$$

oder, wenn man

$$\frac{w}{qc} + i \frac{q}{qc} = w_0 + iq_0$$

setzt,

$$w_0 = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \vartheta} \quad \text{und} \quad q_0 = \frac{2r \sin \vartheta}{1 + r^2 - 2r \cos \vartheta},$$

woraus

$$\cos \vartheta = \frac{w_0(1 + r^2) - (1 - r^2)}{2rw_0} \quad \text{und} \quad \sin \vartheta = \frac{q_0(1 - r^2)}{2rw_0}. \quad (11)$$

Werden die beiden letzten Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man

$$[w_0(1+r^2) - (1-r^2)]^2 + q_0^2(1-r^2)^2 = 4r^2w_0^2$$

$$r^4 - 2r^2 \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1}{(w_0 + 1)^2 + q_0^2} + \frac{(w_0 - 1)^2 + q_0^2}{(w_0 + 1)^2 + q_0^2} = 0$$

$$r^2 = \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1}{(w_0 + 1)^2 + q_0^2} \pm \sqrt{\frac{[w_0^2 + q_0^2 + 1]^2 - [(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2]^2}}$$

Der Zähler unter dem Wurzelzeichen wird $4w_0^2$, also

$$r^2 = \frac{(w_0 - 1)^2 + q_0^2}{(w_0 + 1)^2 + q_0^2} \tag{12}$$

Aus (11) erhält man demnach

$$\operatorname{tg} \mathcal{J} = \frac{2q_0}{w_0^2 + q_0^2 - 1} \tag{13}$$

r^2 ist der *Energie-Reflexionskoeffizient*. Wird er mit R bezeichnet, so hat man also

$$r^2 = R \quad \text{und} \quad a = 1 - r^2 = 1 - R,$$

wo a der *Energie-Absorptionskoeffizient* ist.

Die Gleichung (8) kann indessen auch auf andere Weise behandelt werden.

Setzt man

$$\frac{Z_e}{\rho c} = w_0 + iq_0,$$

so erhält man durch Einsetzen in (8)

$$\frac{Z_a}{\rho c} = \frac{(w_0 + iq_0) \cos kl + i \sin kl}{\cos kl + i(w_0 + iq_0) \sin kl} = \frac{w_0 + i \left(q_0 \cos 2kl - \frac{1}{2} [w_0^2 + q_0^2 - 1] \sin 2kl \right)}{(\cos kl - q_0 \sin kl)^2 + w_0^2 \sin^2 kl}$$

Z ist reell, wenn

$$q_0 \cos 2kl - \frac{1}{2} (w_0^2 + q_0^2 - 1) \sin 2kl = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} 2kl = \frac{2q_0}{w_0^2 + q_0^2 - 1}$$

Der reelle Wert von $\frac{Z_a}{\rho c}$ ist also

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z_a}{\rho c}\right)_{\text{reel}} &= \frac{w_0}{(\cos kl - q_0 \sin kl)^2} \\ &= \frac{w_0}{\frac{1}{2}(1 - \cos 2kl)(w_0^2 + q_0^2) - q_0 \sin 2kl + \frac{1}{2}(1 + \cos 2kl)}. \end{aligned}$$

Aber

$$\cos 2kl = \pm \frac{w_0^2 + q_0^2 - 1}{\sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4q_0^2}}$$

und

$$\sin 2kl = \pm \frac{2q_0}{\sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4q_0^2}},$$

die, eingesetzt, die reellen Werte $\frac{Z'_a}{\rho c}$ und $\frac{Z''_a}{\rho c}$ ergeben.

$$\begin{aligned} \frac{Z'_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 + \sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4q_0^2}}{2w_0} \\ \frac{Z''_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 - \sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4q_0^2}}{2w_0} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{Z'_a}{\rho c}} \right\} (14)$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{Z'_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 + \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}}{2w_0} \\ \frac{Z''_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 - \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}}{2w_0}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{Z'_a}{\rho c}} \right\} (15)$$

Diese beiden Werte sind Schnittpunkte eines Kreises

$$\text{Mittelpunkt: } \left(\frac{w_0^2 + q_0^2 + 1}{2w_0}, 0 \right)$$

$$\text{Radius: } \frac{\sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}}{2w_0}$$

mit der w -Achse, also mit der Gleichung

$$\left(x - \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1}{2w_0}\right)^2 + y^2 = \frac{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}{4w_0^2}.$$

Man hat

$$r^2 = \frac{(w_0 - 1)^2 + q_0^2}{(w_0 + 1)^2 + q_0^2},$$

woraus

$$1 - r = 1 - \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}$$

und

$$1 + r = 1 + \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]},$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned} \frac{1+r}{1-r} &= \frac{\sqrt{(w_0 + 1)^2 + q_0^2} + \sqrt{(w_0 - 1)^2 + q_0^2}}{\sqrt{(w_0 + 1)^2 + q_0^2} - \sqrt{(w_0 - 1)^2 + q_0^2}} \\ &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 + \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}}{2w_0}, \end{aligned}$$

und auf die gleiche Weise

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 - \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + q_0^2][(w_0 - 1)^2 + q_0^2]}}{2w_0}.$$

Die Schnittpunkte des Kreises mit der w -Achse sind also

$$\frac{1+r}{1-r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1-r}{1+r}.$$

Aus (12) und (13) erhellt, dass Iso-Reflexionskurven und Iso-Phasenkurven Kreise sind. Bei einfacher Berechnung erhält man aus (12)

$$w^2 + q^2 - 2w \frac{1+R}{1-R} + 1 = 0$$

oder

$$\left(w - \frac{1+R}{1-R}\right)^2 + q^2 = \frac{4R}{(1-R)^2}, \tag{16}$$

d. h. die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt in $\left(\frac{1+R}{1-R}, 0\right)$ und dem Radius $= \frac{2\sqrt{R}}{1-R}$.

Aus (13) findet man auf dieselbe Weise

$$w^2 + (q - \cot \vartheta)^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta}, \quad (17)$$

d. h. die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt in $(0, \cot \vartheta)$ und dem Radius $= \frac{1}{\sin \vartheta}$.

Die Kreise (16) und (17) schneiden sich in zwei Punkten, deren Koordinaten w_0 und q_0 die Komponenten von Z_e (und somit von Z_a) sind. Sind w_0 und q_0 bekannt, so können r und ϑ bestimmt werden, und umgekehrt, wenn r und ϑ bekannt sind, können w_0 und q_0 eindeutig bestimmt werden. Z_a durchläuft den Reflexionskreis, wenn l variiert; seine Phase für jeden Wert von l ergibt sich aus (10a), seine Widerstands- und Blind-Komponente w_0 und q_0 aus dem Schnittpunkt des entsprechenden Phasenkreises mit der Geraden der Gleichung $q = \cot \frac{\vartheta}{2}$.

3. Berechnung des Absorptionskoeffizienten.

Wenn das Rohr mit der Eingangsimpedanz Z_a und der Ausgangsimpedanz Z_e vor einem Telephon angebracht wird, so wird der Absorptionskoeffizient von Z_e für die ausgestrahlte Energie bestimmend. Wenn l variiert, wird Z_a einen Iso-Reflexionskreis durchlaufen und für $2kl - \vartheta = 0$ Maximum und für $2kl - \vartheta = \pi$ Minimum sein. Dies ist unmittelbar aus (10) zu entnehmen. Maximum von Z_a besagt Minimum ausgestrahlter Energie, und Minimum von Z_a — Maximum der Ausstrahlung. Die Ausstrahlungskurve erhält somit die in Fig. 1 wiedergegebene Form.

Wird das Verhältnis zwischen den Maximum- und Minimumwerten der Ausstrahlungskurve F benannt, so hat man (10b) gemäss

$$F = \frac{\frac{Z'_a}{\varrho c}}{\frac{Z''_a}{\varrho c}} = \left(\frac{1 + \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}} \right)^2. \quad (18)$$

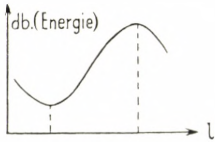


Fig. 1.

Hieraus ergibt sich

$$\sqrt{R} = \frac{\sqrt{F}-1}{\sqrt{F}+1}.$$

Aber $R = 1 - a$, also

$$a = 1 - R = \frac{4\sqrt{F}}{(\sqrt{F}+1)^2}. \quad (19)$$

Ein Vergleich von (18) mit (10 b) ergibt ferner unmittelbar, dass die reelle Komponente von Z_e (der Strahlungswiderstand) gleich \sqrt{F} ist.

Hiermit ist völlige Übereinstimmung mit der in der früheren Abhandlung¹ angegebenen Formel zur Berechnung der Ausstrahlung geschaffen, und da diese Berechnung auf einer elektrischen Analogie fusst, ist die Zulässigkeit der Anwendung dieser Analogie erwiesen.

4. Die akustische Rohrleitung mit Reibung.

Für eine Rohrleitung, die so eng und so lang ist, dass man von der Reibung nicht absehen kann, wird die Lösung von (4) erheblich schwieriger. Man hat jetzt nur $G = 0$ und findet aus (6)

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{R}{2i\omega C}} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Mit Hilfe des Umsatzschemas erhält man

$$Z = \frac{\varrho c}{A} + \frac{r}{A} \cdot \frac{p z}{2iA} \cdot \frac{A}{\varrho c} = \frac{\varrho c}{A} \left(1 - i \frac{r}{2\varrho\omega} \frac{p z}{\varrho c^2} \right) = \frac{\varrho c}{A} \left(1 - i \frac{r}{2\varrho\omega} \right). \quad (20)$$

Ferner aus (7)

$$\gamma = i\omega \sqrt{LC} + \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

was an Hand des Umsatzschemas

$$\gamma = ik + \frac{r}{2A} \sqrt{\frac{A}{p z} \cdot \frac{A}{\varrho}} = ik + \frac{r}{2\varrho c} \quad (21)$$

ergibt.

¹ loc. cit. S. 3.

Bei direkter Rechnung erhält man

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{i\omega C}} = \sqrt{\frac{\frac{r}{A} + \frac{i\omega C}{A}}{i\omega \cdot \frac{A}{pz}}} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{(r + i\omega C) pz}{i\omega}},$$

was nach passender Umschreibung übergeht in

$$Z = \frac{qc}{A} \sqrt{1 - i \frac{r}{2q\omega}} = \frac{qc}{A} \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right),$$

wenn $\frac{r}{q\omega}$ klein ist.

Ferner

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L) \cdot i\omega C} = \sqrt{\left(\frac{r}{A} + i\omega \frac{q}{A}\right) \cdot i\omega \cdot \frac{A}{pz}},$$

was umgeformt werden kann in

$$\gamma = ik \sqrt{1 - i \frac{r}{2q\omega}} = ik \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) = ik + \frac{r}{2q\omega},$$

wenn $\frac{r}{q\omega}$ klein ist.

Werden die Werte für Z und γ in (4) eingesetzt, so ergibt sich

$$Z_\alpha = qc \cdot \frac{\frac{Z_e}{qc} \cosh \left[ikl \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) \right] + \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) \sinh \left[ikl \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) \right]}{\left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) \cosh \left[ikl \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) \right] + i \frac{Z_e}{qc} \sinh \left[ikl \left(1 - i \frac{r}{2q\omega}\right) \right]}. \quad (22)$$

Dieser Ausdruck, der von ziemlich übersichtlicher Form ist, kann durch passende Behandlung umgewandelt werden in¹

¹ Für die Durchrechnung dieses Ausdrucks möchte ich Herrn stud. mag. B. BUCHMANN-OLSEN danken.

$$Z_a = \rho c \cdot \left. \begin{aligned} & \left[\frac{2 Z_e + r l}{2 \rho c} + \frac{2 \cdot \frac{r^2}{k} Z_e}{(2 \rho c)^3} \right] \cos kl + \frac{r}{2 \rho c} \sin kl + i \left[\left(1 + \frac{2 r l Z_e}{(2 \rho c)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2 \cdot \frac{r^3}{k} l Z_e}{(2 \rho c)^4} \right) \sin kl - \frac{2 \cdot \frac{r^2}{k} l}{(2 \rho c)^2} \cos kl \right] \\ & \left(1 + \frac{2 r l Z_e}{(2 \rho c)^2} \right) \cos kl - \frac{2 \cdot \frac{r}{k} Z_e}{(2 \rho c)^2} \sin kl + i \left[\frac{2 Z_e + r l}{2 \rho c} \sin kl \right. \\ & \left. + \frac{2 \cdot \frac{r^2}{k} l Z_e}{(2 \rho c)^3} \cos kl \right] \end{aligned} \right\} (23)$$

worin nur gewöhnliche trigonometrische Funktionen auftreten. Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen; denn da $\frac{r}{\rho \omega}$ als eine kleine Grösse vorausgesetzt wurde, kann man von allen Gliedern absehen, die $\frac{r}{\rho \omega}$ in höheren Potenzen als 1 enthalten. Dadurch erhält man

$$Z_a = \rho c \cdot \frac{\left(\frac{Z_e}{\rho c} + \frac{r}{2 \rho c} \cdot l \right) \cos kl + \frac{r}{2 \rho \omega} \sin kl + i \sin kl}{\cos kl - \frac{Z_e}{\rho c} \cdot \frac{r}{2 \rho \omega} \cdot \sin kl + i \left(\frac{Z_e}{\rho c} + \frac{r}{2 \rho c} \cdot l \right) \sin kl}. \quad (24)$$

Dieser Ausdruck enthält einerseits ein »universelles« Reibungsglied $\frac{r}{2 \rho \omega}$, das von Z herrührt, andererseits ein Reibungsglied $\frac{r}{2 \rho c} \cdot l$, das mit der Länge der Rohrleitung wächst.

Bevor diese Gleichung (24) allgemein behandelt werden kann, wollen wir die (12) und (13) entsprechenden Ausdrücke für den Reflexionskoeffizienten $r^2 = R$ und den Phasensprung \mathcal{S} bei Z_e zu bilden versuchen.

Man hat

$$\sqrt{R} \cdot e^{i \mathcal{S}} = \frac{Z_e - Z}{Z_e + Z},$$

wo

$$Z = qc \cdot \left(1 - i \frac{r}{2qc}\right) = qc \cdot (1 - i\eta).$$

Also

$$\sqrt{R} e^{i\vartheta} = \frac{w_0 + iq_0 - (1 - i\eta)}{w_0 + iq_0 + (1 - i\eta)} = \frac{w_0^2 + q_0^2 - 1 + \eta^2}{(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2} + i \frac{2(q_0 + w_0\eta)}{(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2}$$

Hieraus erhält man zunächst

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2(q_0 + w_0\eta)}{w_0^2 + q_0^2 - 1 + \eta^2} \quad (25)$$

und ferner

$$R = \frac{[w_0^2 + q_0^2 - 1 + \eta^2]^2 + 4[q_0 + w_0\eta]^2}{[(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2]^2},$$

was nach einiger Umformung zu

$$r^2 = R = \frac{(w_0 - 1)^2 + (q_0 + \eta)^2}{(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2} \quad (26)$$

führt.

In (25) und auch in (26) ist die Ähnlichkeit mit (12) und (13) auffallend.

Es ist nicht tunlich, (24) in eine (10) entsprechende Form zu bringen. Der reelle Teil des Zählers allein wird so viele Glieder (mehr als 20) enthalten, dass man den Überblick gänzlich verliert und daher keine durchgreifende Reduktion vornehmen kann; dazu kommt dann noch der imaginäre Teil von Zähler und Nenner. Dagegen hat sich das auf S. 9 ff. benutzte Verfahren als brauchbar erwiesen. Der Einfachheit halber wird die Untersuchung jedoch in 2 Teile geteilt: zunächst wird (24) unter der Voraussetzung betrachtet, dass das Glied $\frac{r}{2qc} \cdot l$ (im folgenden mit $\xi \cdot l$ bezeichnet) nicht existiert. Sodann wird das Glied $\xi \cdot l$ wieder in das Endergebnis eingeführt, was sich als ziemlich leicht erweist, wenn die einfachere Form erst gelöst ist.

In (24), ohne das Glied $\xi \cdot l$, setzen wir also

$$\frac{Z_e}{qc} = w_0 + iq_0$$

und erhalten nun

$$\frac{Z_a}{\rho c} = \frac{(w_0 + iq_0) \cos kl + \eta \sin kl + i \sin kl}{\cos kl - \eta (w_0 + iq_0) \sin kl + i (w_0 + iq_0) \sin kl}.$$

Durch Multiplikation in Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Grösse erhält man

$$\begin{aligned} \frac{Z_a}{\rho c} &= \frac{w_0 - \eta (w_0^2 - q_0^2 - 1) \cos kl \sin kl - w_0 \eta^2 \sin^2 kl}{(\cos kl - w_0 \eta \sin kl - q_0 \sin kl)^2 + (w_0 - q_0 \eta)^2 \sin^2 kl} \\ &+ i \frac{q_0 (\cos^2 kl - \sin^2 kl) - (w_0^2 + q_0^2 - 1) \cos kl \sin kl - 2 (w_0 \eta - q_0 \eta^2) \sin^2 kl}{(\cos kl - w_0 \eta \sin kl - q_0 \sin kl)^2 + (w_0 - q_0 \eta)^2 \sin^2 kl}. \end{aligned}$$

Die Bedingung dafür, dass $\frac{Z_a}{\rho c}$ reell ist, ist demnach

$$q_0 (\cos^2 kl - \sin^2 kl) - (w_0^2 + q_0^2 - 1) \cos kl \sin kl - 2 (w_0 \eta - q_0 \eta^2) \sin^2 kl = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$\operatorname{tg} 2kl = \frac{2 (q_0 + w_0 \eta)}{w_0^2 + q_0^2 - 1}, \tag{27}$$

da die Annäherung gemacht wird, dass Glieder mit η^2 weglassen werden können, was als zulässig zu betrachten ist, da η eine kleine Grösse ist. Dadurch erhält man

$$\cos 2kl = \pm \frac{w_0^2 + q_0^2 - 1}{\sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4 (q_0 + w_0 \eta)^2}}$$

und

$$\sin 2kl = \pm \frac{2 (q_0 + w_0 \eta)}{\sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4 (q_0 + w_0 \eta)^2}}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann der reelle Teil des Zählers nach einigem Rechnen folgendermassen geschrieben werden:

$$w_0 - \frac{\eta}{2} (2q_0 + w_0 \eta),$$

während der Nenner

$$\frac{1}{2} (w_0^2 + q_0^2 + 1) \pm \sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4 (q_0 + w_0 \eta)^2}$$

wird.

Macht man ferner den Nenner rational, so lassen sich die beiden reellen Werte der Impedanz $\frac{Z'_a}{\rho c}$ und $\frac{Z''_a}{\rho c}$ folgendermassen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z'_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 + \sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4(q_0 + w_0\eta)^2}}{2(w_0 - q_0\eta)} \\ \text{und} \\ \frac{Z''_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 - \sqrt{(w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4(q_0 + w_0\eta)^2}}{2(w_0 - q_0\eta)}. \end{aligned} \right\} (28)$$

Für die Grösse unter dem Wurzelzeichen in (28) hat man nun

$$\begin{aligned} & (w_0^2 + q_0^2 - 1)^2 + 4(q_0 + w_0\eta)^2 \\ = & [(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2] [(w_0 - 1)^2 + (q_0 + \eta)^2] + 2\eta^2(w_0^2 + q_0^2 - 1) + \eta^4. \end{aligned}$$

Unter Auslassung höherer Potenzen von η kann (28) daher geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z'_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 + \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2] [(w_0 - 1)^2 + (q_0 + \eta)^2]}}{2(w_0 - q_0\eta)} \\ \text{und} \\ \frac{Z''_a}{\rho c} &= \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1 - \sqrt{[(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2] [(w_0 - 1)^2 + (q_0 + \eta)^2]}}{2(w_0 - q_0\eta)} \end{aligned} \right\} (29)$$

Unter Benutzung des für den reibungsfreien Fall (S. 11) angewandten Verfahrens bildet man nun mit Hilfe von (26) die Grössen

$$\frac{1+r}{1-r} \quad \text{und} \quad \frac{1-r}{1+r},$$

worauf man nach einigem Rechnen (ebenso wie S. 11) zeigen kann, dass

$$\frac{Z'_a}{\rho c} = \frac{1+r}{1-r} \quad \text{und} \quad \frac{Z''_a}{\rho c} = \frac{1-r}{1+r}. \quad (29a)$$

Diese beiden Werte sind Schnittpunkte der Linie $q = -\eta \cdot w$ mit einem Kreise mit

$$\text{Mittelpunkt: } \left(\frac{w_0^2 + q_0^2 + 1}{2(w_0 - q_0\eta)}, -\eta \cdot \frac{w_0^2 + q_0^2 + 1}{2(w_0 - q_0\eta)} \right) \quad (30)$$

und Radius:

$$\sqrt{\frac{[(w_0 + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2] [(w_0 - 1)^2 + (q_0 + \eta)^2]}{2(w_0 - q_0 \eta)}} \cdot \sqrt{1 + \eta^2}.$$

Die Iso-Reflexionskurven werden aus (26) ermittelt. Man erhält

$$w^2 + q^2 - 2w \frac{1+R}{1-R} + 2q \frac{1+R}{1-R} \cdot \eta + \frac{1-R}{1+R} + \eta^2 = 0$$

oder

$$\left(w - \frac{1+R}{1-R}\right)^2 + \left(q + \eta \frac{1+R}{1-R}\right)^2 = \frac{4R}{(1-R)^2} (1 + \eta)^2. \quad (31)$$

Diese Kreisschar (nämlich, wenn R variiert) enthält natürlich auch den Kreis (30), den Kreis, dessen R w_0 und q_0 entspricht.

Die Iso-Phasenkurven sind auch Kreise. Man erhält nämlich aus (25)

$$w^2 + q^2 - 2w\eta \cot \vartheta - 2q \cot \vartheta - 1 - \eta^2 = 0$$

oder

$$(w - \eta \cot \vartheta)^2 + (q - \cot \vartheta)^2 = \frac{1 + \eta^2}{\sin^2 \vartheta}. \quad (32)$$

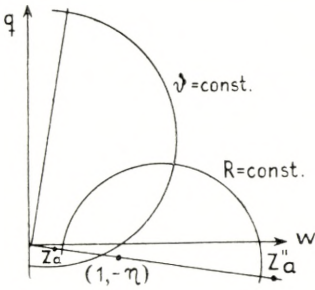


Fig. 2.

Reflexions- und Phasenkreise verlaufen somit wie Fig. 2 zeigt. Die Mittelpunkte liegen nicht, wie im reibungsfreien Falle, auf der w - bzw. q -Achse, sondern auf zwei winkelrecht zueinander befindlichen Linien, die mit den Achsen einen (kleinen) Winkel bilden, dessen Tangente $-\eta$ ist. Der Punkt $(1, 0)$ war in dem reibungsfreien Falle ein $R = 0$ entsprechender, singulärer Punkt, durch den alle

Phasenkreise gingen. Hier ist der entsprechende Punkt $(1, -\eta)$. Dies entspricht also $R = 0$ ($a = 1$) und alle Phasenkreise gehen auch hier durch. Diese letzteren schneiden ausserdem die Linie

$$q = +\frac{1}{\eta} \cdot w$$

$$\left(\eta \cot \frac{\vartheta}{2}, \cot \frac{\vartheta}{2} \right) \quad \text{und} \quad \left(-\eta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, -\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Die Reflexionskreise schneiden die Linie $q = -\eta \cdot w$ an zwei Punkten, deren Koordinaten das Produkt 1 haben und welche Maximum- und Minimumwerte der Eingangsimpedanz Z_a des Rohres sind. Man ersieht hieraus, dass die Maximum- und Minimumwerte von Z_a nicht ganz reell sind, sondern eine kleine Blindkomponente der Grösse $\eta \cdot w$ haben; sie haben aber, wie in (29) und (29a) gezeigt wurde, die exakten Werte $\frac{1+r}{1-r}$ und $\frac{1-r}{1+r}$. Die Ausstrahlungskurve muss also genau den gleichen Verlauf nehmen wie im reibungsfreien Falle, der unter 3 in den Formeln (18) und (19) behandelt wurde. Dies ist indessen nur von sekundärem Interesse, da wir bei der Behandlung von (24) das Glied $\xi \cdot l$ ausgelassen haben. Dasselbe muss nun wieder eingefügt werden. Es zeigt sich indessen, dass $\xi \cdot l$ in der Weise in die Formel eingeht, dass man w unmittelbar durch $w + \xi \cdot l$ ersetzen kann. Aus (29) erhält man

$$\left. \begin{aligned} & \frac{Z'_a}{\varrho c} = \frac{(w_0 + \xi l)^2 + q_0^2 + 1}{2(w_0 + \xi l - q_0 \eta)} \\ & + \frac{\sqrt{[(w_0 + \xi l + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2] [(w_0 + \xi l - 1)^2 + (q_0 - \eta)^2]}}{2(w_0 + \xi l - q_0 \eta)} \\ \text{und} \\ & \frac{Z''_a}{\varrho c} = \frac{(w_0 + \xi l)^2 + q_0^2 + 1}{2(w_0 + \xi l - q_0 \eta)} \\ & - \frac{\sqrt{[(w_0 + \xi l + 1)^2 + (q_0 - \eta)^2] [(w_0 + \xi l - 1)^2 + (q_0 + \eta)^2]}}{2(w_0 + \xi l - q_0 \eta)}. \end{aligned} \right\} (33)$$

Wird indessen in (33) $q_0 = -\eta w_0$ eingesetzt, so erhält man

$$\frac{Z'_a}{\varrho c} = w_0 + \xi \cdot l \quad \text{und} \quad \frac{Z''_a}{\varrho c} = \frac{1}{w_0 + \xi \cdot l}, \quad (34)$$

wobei von Gliedern mit höheren Potenzen von η als 1 abgesehen wird.

5. Ausstrahlung von einem akustischen Widerstand mit Reibung.

Fragen wir nach der ausgestrahlten akustischen Energie, so ist das Verfahren im wesentlichen dasselbe wie das unter 3 bei der Berechnung des Absorptionskoeffizienten benutzte. Das Maximum von $\frac{Z_a}{\rho c}$ ist das Minimum ausgestrahlter Energie und umgekehrt. Wird das Verhältnis von Maximum zu Minimum der Ausstrahlungskurve in Energiemassen für F ausgedrückt, so erhält man mit Hilfe von (34)

$$F = \frac{\frac{Z'_a}{\rho c}}{\frac{Z''_a}{\rho c}} = \frac{1}{(w_0 + \xi \cdot l)^2},$$

woraus

$$w_0 + \xi \cdot l = \frac{1}{\sqrt{F}}, \quad (35)$$

und diese Formel steht mit der in der früheren Abhandlung¹ ermittelten in Einklang.

Eine etwas bessere Annäherung erlangt man an Hand der folgenden Betrachtungen. Der Effekt, der sich im akustischen Widerstand absetzt, besteht aus zwei Komponenten, nämlich der sich im Rohr absetzenden (in $\xi \cdot l$) und der von der Öffnung ausgestrahlten (sich in w_0 absetzenden) Komponente. Bei der letzteren hat man für den Maximumwert

$$\text{Eff}'_{\max} = \frac{w'_0}{\left(\frac{Z'_a}{\rho c}\right)^2} \cdot E^2 = \frac{w'_0}{(w'_0 + \xi l_1)^2} \cdot E^2$$

und für den Minimumwert

$$\text{Eff}''_{\min} = \frac{w''_0}{\left(\frac{Z''_a}{\rho c}\right)^2} \cdot E^2 = \frac{w''_0}{(w''_0 + \xi l_2)^2} \cdot E^2,$$

¹ loc. cit. S. 3

wo w'_0 und w''_0 den »grossen« bzw. den »kleinen« Wert von $\frac{Z_a}{\rho c}$ darstellen. Dieselben werden aus (29) gefunden, indem man $q = -\eta \cdot w$ einsetzt. Danach erhält man

$$F = \frac{\text{Eff}_{\max}}{\text{Eff}_{\min}} = \frac{w'_0}{w''_0} \cdot \frac{(w''_0 + \xi l_2)^2}{(w'_0 + \xi l_1)^2}. \quad (36)$$

Hier sind l_1 und l_2 die beiden Rohrlängen, die dem Maximum bzw. Minimum entsprechen. Man sieht, dass, wenn w''_0 gegenüber ξl_2 gross ist, (36) in (35) übergeht, da man ja ausserdem $w'_0 \cdot w''_0 = 1$ hat.

Diese Formel (36) stimmt auch mit der in der früheren Abhandlung gefundenen genau überein, und damit ist die Richtigkeit sämtlicher Formeln für den Zusammenhang zwischen den akustischen Komponenten der verschiedenen Teile und der Ausstrahlung erwiesen. Zugleich hat man an Hand der in Fig. 2 ausgedrückten Betrachtungen ein bequemes Verfahren gewonnen, Probleme betreffend Absorption und Phasensprünge auch in denjenigen Fällen zu behandeln, wo Reibung vorhanden ist. Dieses Verfahren hat bisher nur dann benutzt werden können, wenn kein Verlustwiderstand vorhanden war.